# 1 Efficiency of Bows

How much of the energy stored in a bow is really transferred to the arrow? Basically that depends on the design of the bow (light tips, tiller) and the weight of the arrow. The efficiency of the system can be measured.

## 1.1 Overview

A few basics . . . Physics isn't so boring at all :)

### 1.1.1 Energy

There exist several kinds of energy: Thermic energy, kinetic energy of a moving mass (car), potential energy of the flower pot before it falls off the window ledge, deformation energy in the rubber band when it is drawn, sound energy of a jet, oscillation energy of a pendular. Energy fundamentally cannot get lost, although it might sometimes look like (e.g. on the swing)—it is only transformed into an other kind.

Example flower pot, which is standing on the window ledge in the fifth floor. Fornent to the street it owns a potential energy (which might be calculated by formula 1). If it now is initiated (some call it kismet, others simply cat), it tips over and falls down. The potential energy is being transformed bit by bit into kinetic energy until the pot misses the pedestrian at a hairbreadth and . . .

A short time before the impact its potential energy is $0$, the kinetic energy however isn't as high as the potential energy before the fall. Why? The flower pot has transferred a part of its energ to the air which is now gyrating slightly. Air resistance!

. . . smashes directly next to his big toe. The kinetic energy has been transformed to deformation energy. But this time it is—in contrast to the rubber band—a plastic deformation as the shards will not piece until an archeologist will dig them out in 2000 years.

At the same time,sound energy is developed (by the shattering flower pot and the pedestrian), and at the place of impact a little thermic energy because of friction.

Now that is not so much different concerning the **Bow.** If it is drawn, it stores deformation energy. The deformation is—at least upto a certain drawing length—elstic. If the arrow is shot now, then a certain percentage of the stored energy is being transferred to the arrow, in form of kinetic energy. The energy remaining in the bow engenders a little thermic and (sinew) sound energy. At the same time the arrow rises a few meters, transforming kinetic[1] into potential energy, and then lowers again (potential energy becomes kinetic again). On all way it brings movement to the air, and in the target (if hit) it creates a more or less big deformation which usually isn't too elastic. That easy it is!

[1] Only movement vertically to earth's surface are transformed between kinetic and potential energy (example flowerpot).

## 1.2 Symbols and Measuring Units

That we know what we are talking about, we need units. Like at cooking. (Even the egg has a measuring unit: The unit!)

- $m\,[\mathrm{kg}]$: Mass, given in kilograms.
- $v\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$: Speed in meters per second. $1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$
- $a\,\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$: Acceleraion. Tells how much faster (or slower, if the acceleration is negative) something moves after one second.
- $g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$: Acceleration of gravity, caused by earth's gravitation. An object falls with a speed of $v = 9.81\ \mathrm{m/s}$ after one second of free fall, air resistance ignored.
- $F\,[\mathrm{N}]$: Force, in Newton. $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2$.
- $E\,[\mathrm{J}]$: Energy, in Joule. $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

For calculations, the values should *always* be convertet into the upper basic SI Units to avoid messes with e.g. meter and centimeter.[2]

I use the expression "draw force" instead of "draw weight" as for drawing a bow one actually needs a force and not a mass.[3] If a mass is hung at the sinew, the bow is only draw when there is gravity which causes the mass to "generate" a force[4]:

$$F_\mathrm{G} = m\,g \tag{2}$$

With this formula one can also calculate from "lb draw weight" into Newton (draw force) by inserting one english pount for the mass $m$.

$$1\,\mathrm{lb}\cdot g = 0.453\ \mathrm{kg}\cdot 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4.44\ \mathrm{N}$$

As a consequence, a 55 lb bow is drawn with a force of $55\ \mathrm{lb}\cdot 4.44\ \mathrm{kg\ m/s}^2 = 244\ \mathrm{N}$ which is about $25\ \mathrm{kg}$.[5]

[2]Why not calculating in centimeters? Many mistakes may be avoided. Because: $10\ \mathrm{cm}\cdot 10\ \mathrm{cm} = 100\ \mathrm{cm}^2$, but as $10\ \mathrm{cm} = 0.1\ \mathrm{m}$, we have $0.1\ \mathrm{m}\cdot 0.1\ \mathrm{m} = 0.01\ \mathrm{m}^2$. Centimeters have to be divided by 100 to obtain meters, but square centimeters by 10 000 for square meters. One can quickly overlook that. Even worse is if meters and centimeters are mixed, e.g. when calculating energy.

[3]What happens when you put a mass of 10 kg on a bow's string in the International Space Station, the ISS? It just floats in the room. Drawing it by hand however works just like on earth because this way one exerts force on the bow.

[4]The potential energy may be received similarly:

$$E_\mathrm{pot} = m\,g\,h. \tag{1}$$

$h$ hereby stands for the relative height, e.g. 10 m above the street.

[5]$F_\mathrm{g} = m \Leftrightarrow m = F_\mathrm{g}/g$. If one uses $10\ \mathrm{m/s}^2$ as approximation for $g$, then the mass only has to be divided by 10 to obtain the force. With a calculator you can certainly use the more exact value.

### 1.3 Berechnung der Energie des Bogens

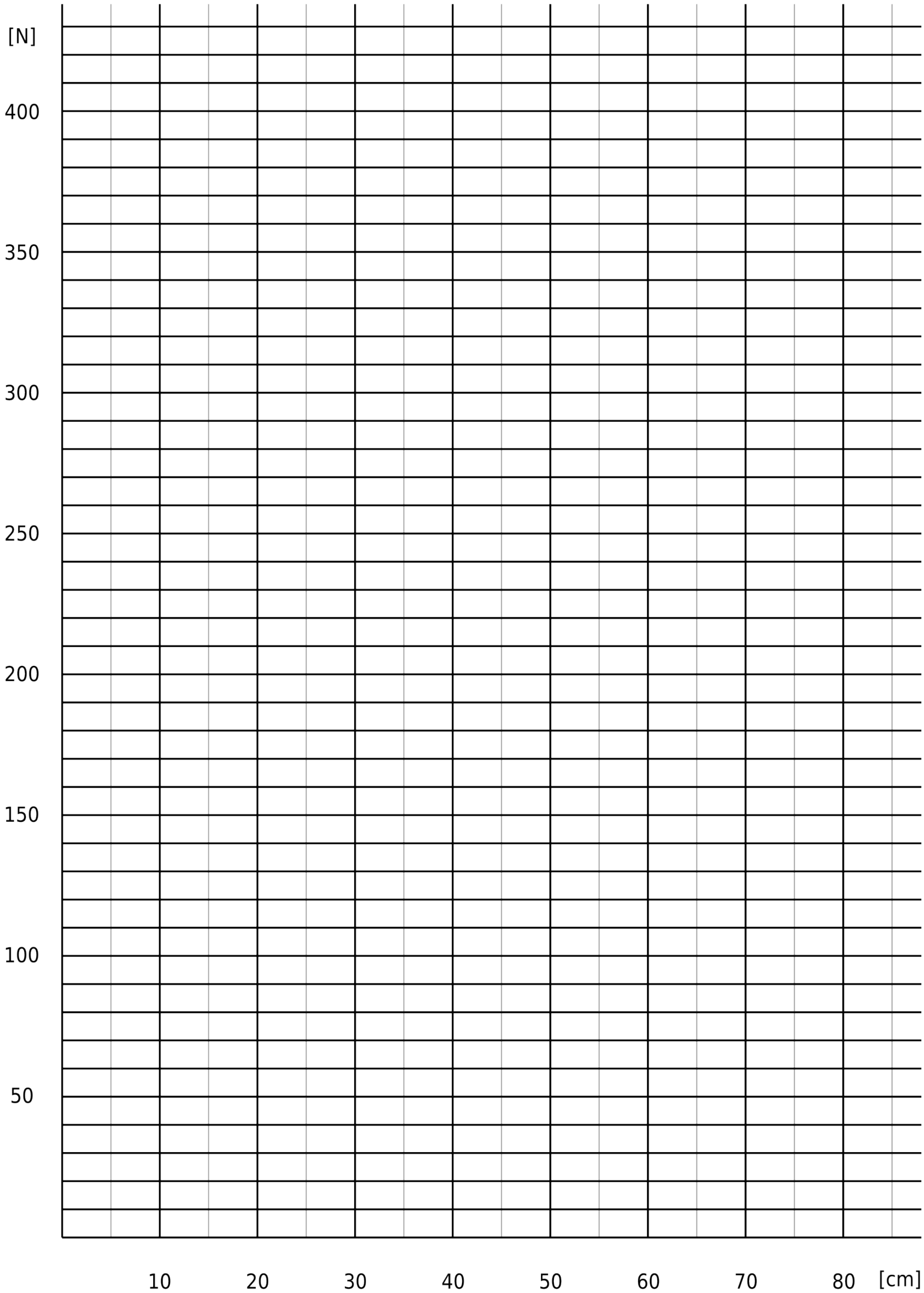
Der erste Schritt ist die Messung der Zugkraft bei verschiedenen Auszuglängen, wie es auch Tim Baker in Band 4 der Bibel des Traditionellen Bogenbaus beschrieben hat. Die Kraft wird in Schritten von $d = 5\ \mathrm{cm} = 0.05\ \mathrm{m}$[6] gemessen[7] und beide Werte in einer Tabelle festgehalten. Vor der Messung sollte der Bogen kurz «warmgeschossen» werden, indem er mindestens drei Mal ganz ausgezogen wird, da die Werte sonst zu hoch sind und nicht der Realität entsprechen!

Die Punkte können nun auf einem Graphen eingezeichnet werden. Für jede gemessene Auszuglänge (x-Achse, unten) wird dazu die Zugkraft (y-Achse, links) eingetragen. Die erhaltenen Punkte verbindet man zu einer Kurve. Diese Kurve sagt schon viel aus über den Charakter, zum Beispiel ob er ein hohes Stacking[8] aufweist oder sich bis zum Schluss weich ziehen lässt. In der Regel weisen kürzere Bögen ein höheres Stacking auf, Recurves verringern es. Die folgende Grafik kann als Vorlage verwendet werden.

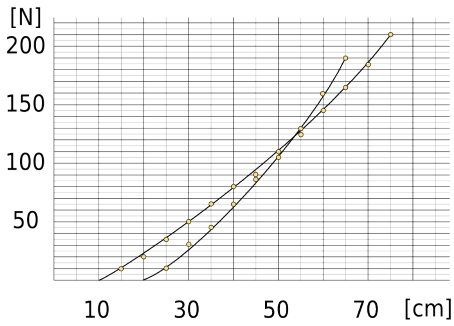
[6] Nochmals zur Erinnerung: Immer in den Basiseinheiten rechnen!

[7] Die Zugkraft kann auch ohne spezielle Hilfsmittel gemessen werden! Dazu sägst du in einen Besenstiel oder ein anderes stabiles Stück Holz, das etwas länger als dein Auszug ist, am Kopf eine Kerbe (Kanten abrunden!), wo die Sehne eingehängt werden kann. Dann wird von der Kerbe an nach unten ein Masstab eingezeichnet. Auf der einen Seite in Inch bzw. Zoll, auf der anderen in Zentimetern. Jetzt wird der Bogen bei der Kerbe eingehängt und nach unten auf eine ganz gewöhnliche Personenwaage gezogen. Die Spitze des Besenstiels drückt nun mit der entsprechenden Kraft auf die Waage. Gewicht des Besenstiels abziehen nicht vergessen!

[8] Als Stacking wird ein hoher Anstieg der Zugkraft nahe des maximalen Auszuges bezeichnet. Bögen mit geringem Stacking sind angenehmer zu schiessen.


[N]
400
350
300
250
200
150
100
50
10
20
30
40
50
60
70
80
[cm]

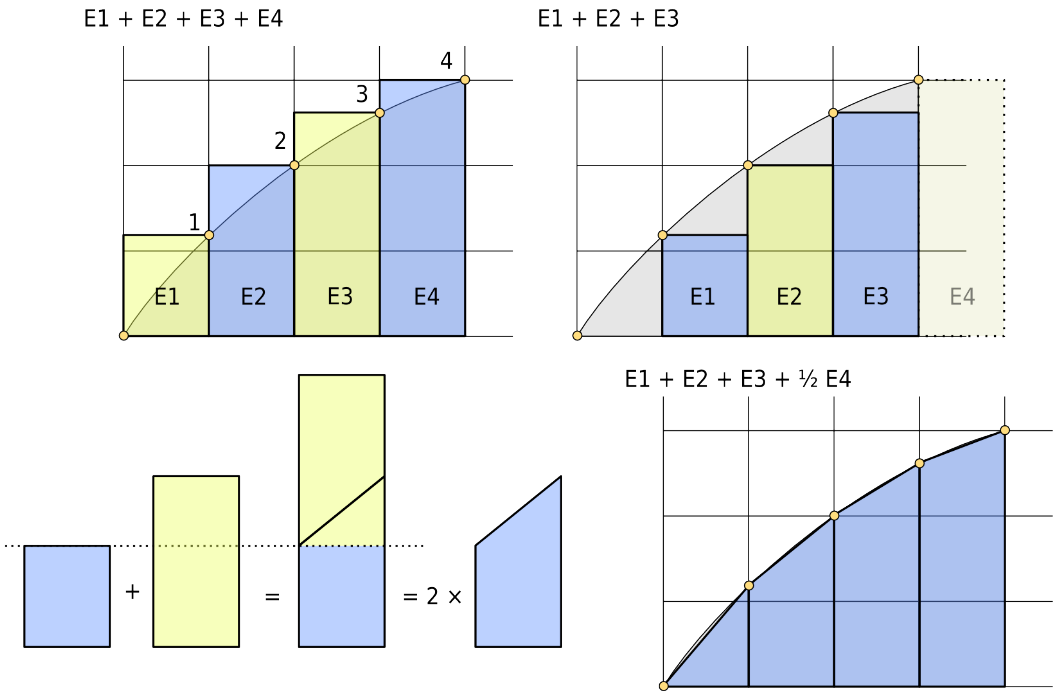
Das kann dann zum Beispiel so wie in der Abbildung unten aussehen. Beides Eschenbögen, einer mit $202\ \mathrm{cm}$ Länge und einer mit $150\ \mathrm{cm}$ (steilere Kurve). Auf den ersten $10\ \mathrm{cm}$ steigt die Zugkraft bei beiden Bögen um $25\ \mathrm{N}$, auf den letzten $10\ \mathrm{cm}$ um $45\ \mathrm{N}$ bzw. beim kurzen Bogen um $60\ \mathrm{N}$.




Praktisch an dieser Darstellung ist, dass nicht nur der Charakter sichtbar wird, sondern auch, wie viel Energie im Bogen gespeichert wird. Das ist genau die Fläche unter der Kurve, denn es gilt:

$$E = F_{\parallel} \cdot s \tag{3}$$

Das heisst: Energie ist Kraft mal Weg, über die diese Kraft ausgeübt wird (das merkt man etwa, wenn man ein Kind auf dem Schlitten den Hang hinaufzieht). Das trifft sich gut, denn in unserem Beispiel haben wir gerade Kraft auf der y-Achse (links) und Weg auf der x-Achse (unten). Wenn man zum Beispiel auf einer Strecke von $s = 1\ \mathrm{m}$ mit einer Kraft von $F_{\parallel} = 1\ \mathrm{N}$ ziehen würde, bekommt man ein Rechteck, dessen Fläche sich mit Länge mal Breite berechnet, also $1\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{N} = 50\ \mathrm{J}$.




Zur Berechnung zerschneidet man nun die Kurve in Streifen mit einer Breite von $d$, genau bei den Messpunkten. Multipliziert man alle Kraftmessungen mit der Strecke $d$ zwischen den Messpunkten, erhält man die Fläche in der obigen Grafik links oben. Vereinfacht rechnet man also, da der Faktor $d$ mit jeder Kraft multipliziert wird:[9]

$$E_{\max} = d \cdot (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$$

Damit erhält man die Flächen $E_1, \cdots, E_n$. Allerdings sind diese Flächen zusammen noch zu gross, da überall Dreiecke hervorstehen. Mit einem kleinen Trick kann man die Kurve unten rechts erreichen – eine gerade Verbindung aller Messpunkte. Betrachten wir die Fläche zwischen Punkt 1 und 2: Hier ist das kleine rechtwinklige Dreieck der Breite $d$ und Höhe $F_2 - F_1$ zu viel. Die Fläche dieses Dreieckes beträgt gerade $E_\triangle = d \cdot \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$, und die Gesamtfläche des Streifens $E_{1,2} = d \cdot (F_2 - \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$, beziehungsweise die doppelte Fläche beträgt:

$$2E_{1,2} = d \cdot (2 \cdot F_2 - (F_2 - F_1)) = d \cdot (2F_2 - F_2 + F_1) = d \cdot (F_1 + F_2)$$

Das wird auch in der Darstellung unten links sichtbar. Diese Formel bedeutet nun, dass man für jeden Streifen den höchsten und den tiefsten Wert der Kraft – also die Messpunkte links und rechts davon – zusammenzählt und so mit $d$ multipliziert die zweifache Fläche erhält. Alle maximalen Werte zusammen haben wir mit $E_{\max}$ schon ausgerechnet. Für die minimalen Werte beginnt man bei der «nullten» Messung, also bei Standhöhe, wo die Zugkraft gleich Null ist, und hört dafür auch eine früher – bei der $(n-1)$-ten – auf:

$$E_{\min} = d \cdot (0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1})$$

Die gespeicherte Energie ist nun die Hälfte der Summe dieser beiden Flächen.[10]

$$\begin{aligned}
E_{\text{Bogen}} &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (F_{\min} + F_{\max}) \\
\text{(einsetzen)} &= d \cdot \frac{1}{2} \cdot (0 + 2F_1 + 2F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n) \\
&= d \cdot (F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + \frac{1}{2}F_n) \\
&= d \cdot (F_1 + \cdots + F_n - \frac{1}{2}F_n) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Hat man beispielsweise die Kräfte $50\ \text{N},\ 100\ \text{N},\ 150\ \text{N},\ 200\ \text{N}$ in Abständen von $d = 20\ cm$ gemessen (der Einfachheit halber, für eine genaue Berechnung ist der Abstand zwischen den Messungen zu gross), beträgt die Energie

$$\begin{aligned}
E_{\text{Bogen}} &= 20\ \text{cm} \cdot \frac{1}{2}\left(\left(50 + 100 + 150 + 200 - \frac{200}{2}\right)\ \text{N}\right) \\
&= 0.2\ \text{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot 400\ \text{N} \\
&= 40\ \text{J}.
\end{aligned}$$

### 1.4 Berechnung der kinetischen Energie des Pfeils

Bei der Messung der Pfeilgeschwindigkeit ist es wichtig, immer den selben Pfeil (gleiches Gewicht) bei gleich bleibendem Auszug zu verwenden. Mit mehreren Messungen kann die Durchschnittsgeschwidigkeit relativ genau bestimmt werden, indem alle Geschwindigkeiten zusammengezählt und am Schluss durch die Anzahl Messungen geteilt werden. Grosse

[9] Natürlich könnte man auch rechnen: $(5\ \text{cm} \cdot 20\ \text{N}) + (5\ \text{cm} \cdot 30\ \text{N}) + (5\ \text{cm} \cdot 40\ \text{N}) + \cdots$, einfacher ist aber $5\ \text{cm} \cdot (20\ \text{N} + 30\ \text{N} + 40\ \text{N} + \cdots)$.

[10] Für Interessierte: Diese Formel entspricht dem Riemann-Integral.

«Ausreisser» in den Messungen, die auf Ablassfehler zurückzuführen sind, sollte man natürlich besser weglassen ;)

Die Formel zur Berechnung der Kinetischen Energie (Bewegungsenergie) lautet:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2}mv^2 \tag{5}$$

Doppelte Geschwindigkeit bedeutet also vierfache Energie.[11] Ein mit einer Geschwindigkeit von $v = 20\ \mathrm{m/s}$ fliegender Pfeil mit einer Masse von $m = 30\ \mathrm{g}$ (entspricht etwa 460 Grains[12]) hat eine kinetische Energie von 6 Joule:

$$E_{\text{kin1}} = \frac{1}{2} \cdot 0.03\,\mathrm{kg} \cdot (20\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 0.5 \cdot 0.03 \cdot 20^2 \cdot \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 6\,\mathrm{J}$$

Bei einer Geschwindigkeit von $v = 40\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}$ ist die Energie also viermal so gross.

$$E_{\text{kin2}} = \frac{1}{2} \cdot 0.03\,\mathrm{kg} \cdot (40\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}})^2 = 0.5 \cdot 0.03 \cdot 40^2 \cdot \mathrm{kg}\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2} = 24\,\mathrm{J}$$

Währenddessen ist die Energie eines Pfeiles mit doppelter Masse aber nur zweimal so gross.

Je nach Gewicht des Pfeiles wird mehr oder weniger Energie auf ihn übertragen. Die optimale Pfeilmasse ist primär von der Stärke des Bogens abhängig; ein stärkerer Bogen kann auch schwerere Pfeile mit anständiger Geschwindigkeit schiessen. Je schwerer der Pfeil, desto mehr Energie wird auf ihn übertragen, die er dem Luftwiderstand entgegensetzen kann. Ab einer gewissen Grenze bringt das allerdings keinen Vorteil mehr – was nützt einem ein $10\ \mathrm{kg}$ schwerer Pfeil, der aber nur einen Meter weit fliegt.

Zum besseren Verständnis ein nachvollziehbares Beispiel: Steine werfen. Kieselsteine kann man am schnellsten werfen, aber der grösste Teil der Energie verbleibt im (tadaa) Wurfarm. Umgekehrt bei einem fussballgrossen Stein: Hier benötigt man die gesamte Kraft, um ihn nur ein, zwei Meter weit zu werfen oder stossen. Das Optimum für die beste Flugweite oder grösste Durchschlagskraft liegt irgendwo dazwischen (bitte nicht in bewohntem Gebiet ausprobieren).

## 1.5 Wirkungsgrad des Bogens

Nun ist es nicht mehr schwer, den Wirkungsgrad des Bogens – das heisst, wie viel der Energie tatsächlich auf den Pfeil übergeht – zu berechnen.

$$\eta = \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{Bogen}}} \tag{6}$$

Mit den in den obigen Beispielen erhaltenen Werten ($E_{\text{kin2}} = 24\ \mathrm{J}$ und $E_{\text{Bogen}} = 40\ \mathrm{J}$) ergibt sich ein Wirkungsgrad von $\eta = 60\ \%$.

$$\eta = \frac{24\ \mathrm{J}}{40\ \mathrm{J}} = 0.6 = 60\ \%$$

Die restlichen vierzig Prozent können nicht genutzt werden und werden nach im Bogen «verbraucht», nachdem der Pfeil die Sehne verlassen hat. Bei einem Leerschuss verbleibt aber die gesamte Energie im Bogen. Unter Umständen kann das zu einem Bruch führen.

[11] Da $40^2 = (2 \cdot 20)^2 = 2^2 \cdot 20^2 = 4 \cdot 20^2$

[12] Ein Grain entspricht etwa 0.0648 g.

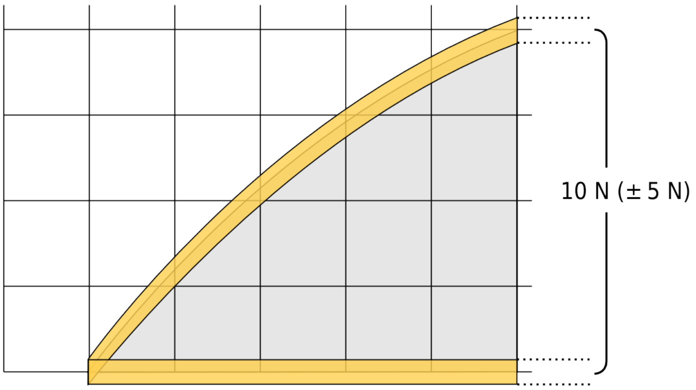
## 1.6 Messfehler

Total genau kann das Ergebnis nicht sein. Verschiedene Faktoren beeinflussen die Genauigkeit der Messung:

- Zugkraft: Waage, eventuell Feuchtigkeit des Bogens bei organischen Materialien, Energieverlust durch zusammengedrückte Holzzellen[13]
- Geschwindigkeit: Geschwindigkeitsmessgerät, Ablassfehler, tatsächlicher Auszug
- Eventuell Feuchtigkeit, die die Stärke des Bogens beeinflusst

Bei jeder Messung kommen noch «menschliche» Fehler hinzu, etwa beim Ablesen der Zugkraft oder bei der Genauigkeit des Auszuges.

Wie stark wirken sich Messfehler aus? Angenommen, bei der Messung der Zugkraft beträgt der Fehler $\mathcal{F} = \pm 5\ \mathrm{N}$.[14] Dann kommt man bei der Berechnung der Energie des Bogens auf einen Fehler von $\mathcal{F} \cdot (s_{\mathrm{Auszug}} - s_{\mathrm{Standh.}})$.




Das ergibt für einen Auszug von $0.7\ \mathrm{m}$ und eine Standhöhe von $0.1\ \mathrm{m}$ einen Fehler von $\mathcal{F}_E = 10\ \mathrm{N} \cdot 0.6\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{J}$. Bei einer gespeicherten Energie von $E = 75\ \mathrm{J}$ ergibt das eine Messabweichung von immerhin $f = \mathcal{F}_E / E = 8\ \%$.

Die Messabweichung kann abgeschätzt werden, indem man für eine bestimmte Auszuglänge drei Messungen hintereinander ausführt. Der Bogen wird zwischen den Messungen wieder entspannt, damit man auch wirklich drei einzelne Messerte hat. Diese drei Messungen werden gemittelt, indem man sie zusammenzählt und dann dann durch die Anzahl Messungen, also 3, teilt. Man nimmt nun an, dass dieses Resultat genau ist, und die Differenz zwischen dieser Mittelung und der davon am meisten abweichenden Messung ist die Messabweichung.

Beispiel: Drei Messungen $x_1 = 153\ \mathrm{N}$, $x_2 = 146\ \mathrm{N}$, $x_3 = 155\ \mathrm{N}$. Zusammen betragen die Messungen $\Sigma = 454\ \mathrm{N}$. Der Mittelwert beträgt also $x_f = \Sigma/3 = 151.3\ \mathrm{N}$, die maximale Abweichung ist in diesem Fall $151.3\ \mathrm{N} - 146\ \mathrm{N} = 5.3\ \mathrm{N}$ oder, da die Messung nach oben und unten abweichen kann, $\pm 5.3\ \mathrm{N}$.

[13] Wird ein Holzbogen länger als etwa 2 Sekunden ausgezogen, nimmt die Zugkraft leicht ab. Der selbe Effekt, der sichtbar wird, wenn man den Bogen mehrere Stunden lang aufgespannt lässt. Nach einiger Zeit «erholt» sich das Holz wieder, falls die Belastung nicht allzu stark war – sonst ensteht Stringfollow, eine dauerhafte Biegung.

[14] Ja – wieder ein $\mathcal{F}$. Nicht meine Schuld. Zur besseren Unterscheidung ist das Fehler-F jedoch in Kalligraphie-Schrift gesetzt, das Kraft-F kursiv: $F$.

### 1.6.1 Auswirkungen auf den Wirkungsgrad

Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann relativ genau bestimmt werden, da ein Geschwindigkeitsmesser normalerweise sehr genau misst. Die einzige «Ungenauigkeit» ist der Mensch mit unterschiedlichem Ablass, aber von Interesse ist ja die Geschwindigkeit, die man beim normalen Schiessen erreicht, und nicht ein künstlich maximierter Wert.

Aus diesem Grund bleibt für den Wirkungsgrad die Abweichung *in Prozent* gleich.[15]

Autor: Simon A. Eugster, http://granjow.net
Die aktuellste Version dieses Dokument ist hier verfügbar.
Dank an Snake-Jo von fletchers-corner.de, Dragona und kra von bogensportinfo.de
und viele weitere aus den Foren für die Korrekturvorschläge und Anregungen!

[15] Die prozentuale Messabweichung bleibt bei der Division durch einen «genauen» Wert gleich: Beispiel: Ein Fantasiewert $z = 100 \pm 10$, der also um $\pm 10$ % abweichen kann ($10/100 = 0.1 = 10$ %), liegt in $[90, 110]$. Teilt man diesen Wert durch einen zweiten, genauen Wert $x = 10$, erhält man $[9, 11]$ beziehungsweise $z/x = 10 \pm 1$. Das entspricht immer noch der selben prozentualen Abweichung ($1/10 = 0.1 = 10$ %).