1 Effizienz von Bögen

Wie viel von der gespeicherten Energie im Bogen wird tatsächlich auf den Pfeil übertragen? Grundsätzlich hängt das vom Design des Bogens (leichte Wurfarmenden, Tiller) und vom Gewicht des Pfeils ab. Wie effizient das System ist, kann man messen.

1.1 Überblick

Ein paar Grundlagen ... Physik ist gar nicht so langweilig :)

1.1.1 Energie

Es existieren verschiedene Formen von Energie: Thermische Energie, kinetische Energie von einer sich bewegenden Masse (Auto), potentielle Energie des Blumentopfs, bevor er vom Fenstersims fällt, Deformationsenergie im Gummiband, wenn es ausgezogen wird, Schallenergie bei einem Düsenjet, Schwingungsenergie beim Pendel. Energie kann grundsätzlich nicht verloren gehen, obwohl es manchmal so scheinen mag (etwa bei einer Schaukel) – sie wird nur in eine andere Form umgewandelt.

Beispiel Blumentopf, der im fünften Stockwerk auf dem Fenstersims steht. Er besitzt gegenüber der Strasse eine potentielle Energie (die man mittels Formel 1 berechnen könnte). Wird er nun angestossen (die einen nennen es Schicksal, die anderen Katze), kippt er und fällt herunter. Die potentielle Energie wird dabei nach und nach in kinetische Energie umgewandelt, bis der Topf den Fussgänger um Haaresbreite verfehlt und ...

Kurz vor dem Aufprall ist seine potentielle Energie 0, die kinetische Energie allerdings nicht mehr gleich hoch wie vor dem Fall die potentielle Energie. Warum? Der Blumentopf hat einen Teil der Energie auf die Luft übertragen, die nun leicht herumwirbelt. Luftwiderstand!

... direkt neben seiner linken grossen Zehe zerschellt. Die kinetische Energie wurde in Deformationsenergie umgewandelt. Dieses Mal handelt es sich, anders als beim Gummiband, allerdings um eine plastische Deformation, denn die Scherben fügen sich erst dann wieder zusammen, wenn sie in 2000 Jahren von einem Archäologen ausgegraben werden.

Gleichzeitig entsteht noch etwas Schallenergie (vom zerspringenden Blumentopf und vom Fussgänger), und an der Aufschlagsstelle ein wenig thermische Energie durch die Reibung.

Beim **Bogen** ist das nun gar nicht so anders. Wenn er ausgezogen wird, speichert er Deformationsenergie. Die Deformation ist – zumindest bis zu einer bestimmten Auszuglänge – elastisch. Wird der Pfeil nun abgeschossen, wird ein bestimmter Prozentsatz der gespeicherten Energie in Form von kinetischer Energie auf den Pfeil übertragen. Die im Bogen verbleibende Energie erzeugt etwas thermische und (Sehne) akustische Energie. Der Pfeil steigt währenddessen um ein paar Meter auf, wobei kinetische[1] in potentielle Energie umgewandelt wird, und sinkt dann wieder (potentielle Energie wird wieder zu kinetischer). Auf dem ganzen Weg bringt er die Luft in Bewegung, und am Ziel entsteht eine mehr oder weniger grosse Deformation, die normalerweise nicht sehr elastisch ist. So einfach ist das!

[1] Nur Bewegungen senkrecht zur Erdoberfläche werden zwischen potentieller und kinetischer Energie umgewandelt (Beispiel Blumentopf).

1.1.2 Symbole und Masseinheiten

Damit wir auch wissen, wovon wir sprechen, brauchen wir Masseinheiten. Wie beim Kochen. (Sogar beim Ei! Dort ist die Masseinheit die Einheit.)

- $m\,[\mathrm{kg}]$: Masse, in Kilogramm angegeben.
- $v\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}\right]$: Geschwindigkeit in Meter pro Sekunde. $1\,\mathrm{m/s} = 3.6\,\mathrm{km/h}$
- $a\left[\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2}\right]$: Beschleunigung. Gibt an, um wie viel schneller (oder langsamer, bei einem negativen Beschleunigungswert) sich etwas nach einer Sekunde bewegt.
- $g = 9.81\ \mathrm{m/s}^2$: Fallbeschleunigung auf der Erde, durch die Gravitation hervorgerufen. Ein Gegenstand fällt nach einer Sekunde mit einer Geschwindigkeit von $v = 9.81\ \mathrm{m/s}$, Luftwiderstand nicht mit einberechnet.
- $F\,[\mathrm{N}]$: Kraft, in Newton. $1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m/s}^2$.
- $E\,[\mathrm{J}]$: Energie, in Joule. $1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2/\mathrm{s}^2$

Für die Berechnungen sollten die Werte *immer* in die obigen Basis-SI-Einheiten umgerechnet werden, damit kein Durcheinander mit zum Beispiel Meter und Zentimeter entsteht.[2]

Ich verwende den Begriff «Zugkraft» statt «Zuggewicht», da zum Spannen des Bogens tatsächlich eine Kraft benötigt wird und nicht eine Masse.[3] Wird ein Gewicht an die Bogensehne gehängt, wird der Bogen nur darum ausgezogen, weil aufgrund der Gravitation (Erdanziehung) eine Kraft entsteht:[4]

$$F_\mathrm{G} = m\,g \tag{2}$$

Mit dieser Formel kann auch von «lb Zuggewicht» in Newton (Zugkraft) umgerechnet werden, wenn man für die Masse m ein englisches Pfund einsetzt.

$$1\,\mathrm{lb}\cdot g = 0.453\ \mathrm{kg}\cdot 9.81\ \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}^2} = 4.44\ \mathrm{N}$$

Ein 55-lb-Bogen wird daher am Schluss mit $55\ \mathrm{lb}\cdot 4.44\ \mathrm{kg\ m/s}^2 = 244\ \mathrm{N}$ gezogen, was ungefähr $25\ \mathrm{kg}$ entspricht.[5]

---

[2] Warum nicht in Zentimetern rechnen? Es lassen sich damit viele Fehler vermeiden. Denn: $10\ \mathrm{cm}\cdot 10\ \mathrm{cm} = 100\ \mathrm{cm}^2$, aber da $10\ \mathrm{cm} = 0.1\ \mathrm{m}$ ist, ist $0.1\ \mathrm{m}\cdot 0.1\ \mathrm{m} = 0.01\ \mathrm{m}^2$. Bei Zentimetern muss man durch 100 teilen, um Meter zu erhalten, bei Quadratzentimetern aber durch 10 000 für Quadratmeter. Das kann man schnell übersehen. Noch schlimmer ist, wenn man Meter und Zentimeter mischt, etwa beim Ausrechnen der Energie.

[3] Was geschieht, wenn man auf der Internationelen Raumstation ISS eine 10-Kilogramm-Masse an die Sehne eines Bogens hängt? Nichts: Sie schwebt einfach im Raum. Von Hand ausziehen kann man ihn aber trotzdem wie auf der Erde, da man so eine Kraft auf den Bogen ausübt.

[4] Die potentielle Energie bekommt man ganz ähnlich:

$$E_\mathrm{pot} = m\,g\,h. \tag{1}$$

h steht dabei für die relative Höhe, wie etwa 10 m über der Strasse.

[5] $F_\mathrm{g} = m \Leftrightarrow m = F_\mathrm{g}/g$. Verwendet man für g als Annäherung $10\ \mathrm{m/s}^2$, muss die Kraft zum Berechnen der Masse nur durch 10 geteilt werden. Mit dem Taschenrechner kann man natürlich den genaueren Wert nehmen.

1.2 Berechnung der Energie des Bogens

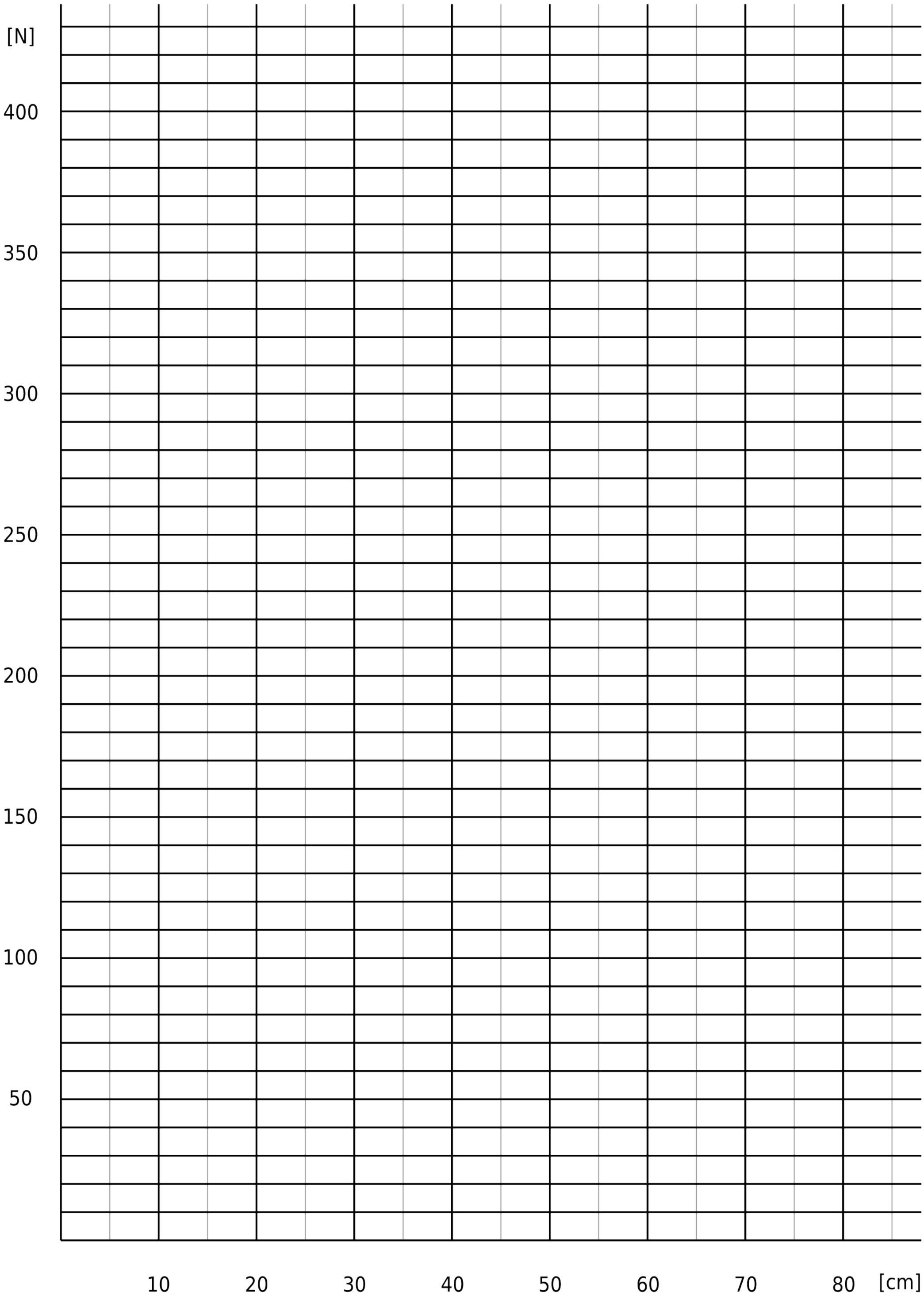
Der erste Schritt ist die Messung der Zugkraft bei verschiedenen Auszuglängen, wie es auch Tim Baker in Band 4 der Bibel des Traditionellen Bogenbaus beschrieben hat. Die Kraft wird in Schritten von $d = 5\ \mathrm{cm} = 0.05\ \mathrm{m}$[6] gemessen[7] und beide Werte in einer Tabelle festgehalten. Vor der Messung sollte der Bogen kurz «warmgeschossen» werden, indem er mindestens drei Mal ganz ausgezogen wird, da die Werte sonst zu hoch sind und nicht der Realität entsprechen!

Die Punkte können nun auf einem Graphen eingezeichnet werden. Für jede gemessene Auszuglänge (x-Achse, unten) wird dazu die Zugkraft (y-Achse, links) eingetragen. Die erhaltenen Punkte verbindet man zu einer Kurve. Diese Kurve sagt schon viel aus über den Charakter, zum Beispiel ob er ein hohes Stacking[8] aufweist oder sich bis zum Schluss weich ziehen lässt. In der Regel weisen kürzere Bögen ein höheres Stacking auf, Recurves verringern es. Die folgende Grafik kann als Vorlage verwendet werden.

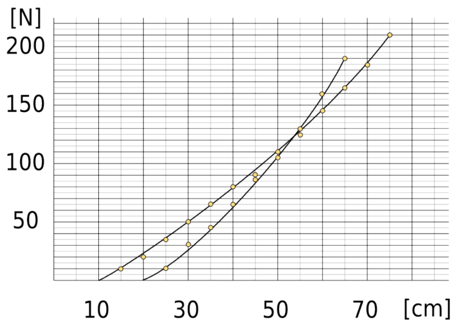
[6] Nochmals zur Erinnerung: Immer in den Basiseinheiten rechnen!

[7] Die Zugkraft kann auch ohne spezielle Hilfsmittel gemessen werden! Dazu sägst du in einen Besenstiel oder ein anderes stabiles Stück Holz, das etwas länger als dein Auszug ist, am Kopf eine Kerbe (Kanten abrunden!), wo die Sehne eingehängt werden kann. Dann wird von der Kerbe an nach unten ein Masstab eingezeichnet. Auf der einen Seite in Inch bzw. Zoll, auf der anderen in Zentimetern. Jetzt wird der Bogen bei der Kerbe eingehängt und nach unten auf eine ganz gewöhnliche Personenwaage gezogen. Die Spitze des Besenstiels drückt nun mit der entsprechenden Kraft auf die Waage. Gewicht des Besenstiels abziehen nicht vergessen!

[8] Als Stacking wird ein hoher Anstieg der Zugkraft nahe des maximalen Auszuges bezeichnet. Bögen mit geringem Stacking sind angenehmer zu schiessen.


[N]
400
350
300
250
200
150
100
50
10
20
30
40
50
60
70
80
[cm]

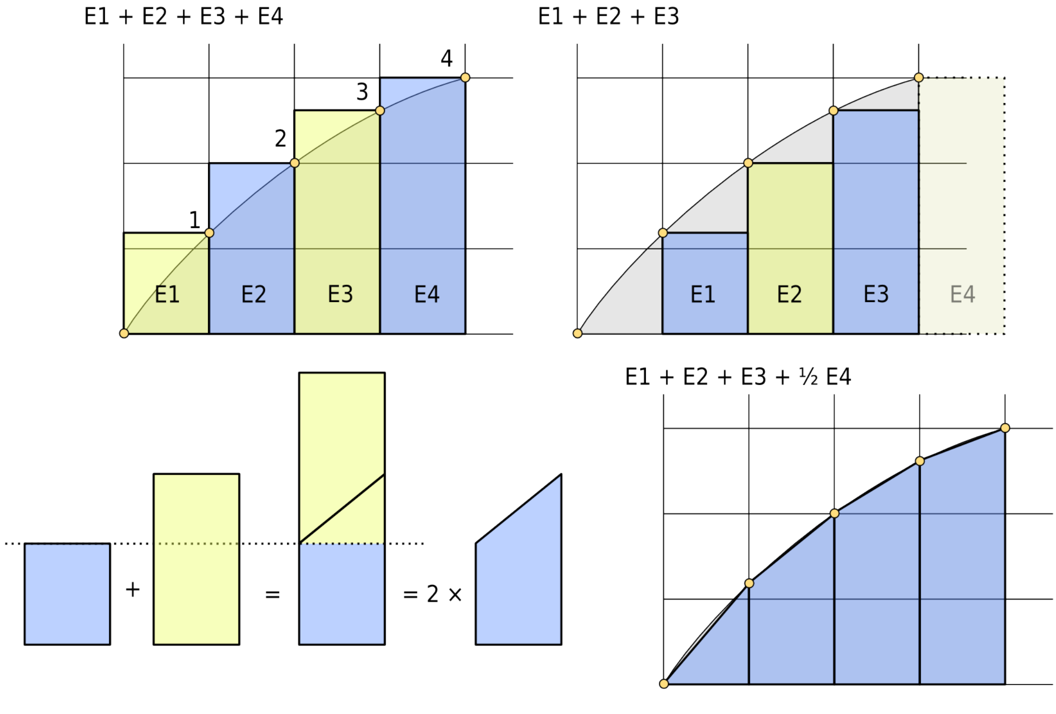
Das kann dann zum Beispiel so wie in der Abbildung unten aussehen. Beides Eschenbögen, einer mit $202\ \mathrm{cm}$ Länge und einer mit $150\ \mathrm{cm}$ (steilere Kurve). Auf den ersten $10\ \mathrm{cm}$ steigt die Zugkraft bei beiden Bögen um $25\ \mathrm{N}$, auf den letzten $10\ \mathrm{cm}$ um $45\ \mathrm{N}$ bzw. beim kurzen Bogen um $60\ \mathrm{N}$.



Praktisch an dieser Darstellung ist, dass nicht nur der Charakter sichtbar wird, sondern auch, wie viel Energie im Bogen gespeichert wird. Das ist genau die Fläche unter der Kurve, denn es gilt:

$$E = F_{\parallel} \cdot s \tag{3}$$

Das heisst: Energie ist Kraft mal Weg, über die diese Kraft ausgeübt wird (das merkt man etwa, wenn man ein Kind auf dem Schlitten den Hang hinaufzieht). Das trifft sich gut, denn in unserem Beispiel haben wir gerade Kraft auf der y-Achse (links) und Weg auf der x-Achse (unten). Wenn man zum Beispiel auf einer Strecke von $s = 1\ \mathrm{m}$ mit einer Kraft von $F_{\parallel} = 1\ \mathrm{N}$ ziehen würde, bekommt man ein Rechteck, dessen Fläche sich mit Länge mal Breite berechnet, also $1\ \mathrm{m} \cdot 50\ \mathrm{N} = 50\ \mathrm{J}$.



Zur Berechnung zerschneidet man nun die Kurve in Streifen mit einer Breite von d, genau bei den Messpunkten. Multipliziert man alle Kraftmessungen mit der Strecke d zwischen den Messpunkten, erhält man die Fläche in der obigen Grafik links oben. Vereinfacht rechnet man also, da der Faktor d mit jeder Kraft multipliziert wird:[9]

$$E_{\max} = d \cdot (F_1 + F_2 + \cdots + F_n)$$

Damit erhält man die Flächen $E_1, \cdots, E_n$. Allerdings sind diese Flächen zusammen noch zu gross, da überall Dreiecke hervorstehen. Mit einem kleinen Trick kann man die Kurve unten rechts erreichen – eine gerade Verbindung aller Messpunkte. Betrachten wir die Fläche zwischen Punkt 1 und 2: Hier ist das kleine rechtwinklige Dreieck der Breite d und Höhe $F_2 - F_1$ zu viel. Die Fläche dieses Dreieckes beträgt gerade $E_{\triangle} = d \cdot \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$, und die Gesamtfläche des Streifens $E_{1,2} = d \cdot (F_2 - \frac{1}{2}(F_2 - F_1)$, beziehungsweise die doppelte Fläche beträgt:

$$2E_{1,2} = d \cdot (2 \cdot F_2 - (F_2 - F_1)) = d \cdot (2F_2 - F_2 + F_1) = d \cdot (F_1 + F_2)$$

Das wird auch in der Darstellung unten links sichtbar. Diese Formel bedeutet nun, dass man für jeden Streifen den höchsten und den tiefsten Wert der Kraft – also die Messpunkte links und rechts davon – zusammenzählt und so mit d multipliziert die zweifache Fläche erhält. Alle maximalen Werte zusammen haben wir mit $E_{\max}$ schon ausgerechnet. Für die minimalen Werte beginnt man bei der «nullten» Messung, also bei Standhöhe, wo die Zugkraft gleich Null ist, und hört dafür auch eine früher – bei der $(n-1)$-ten – auf:

$$E_{\min} = d \cdot (0 + F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1})$$

Die gespeicherte Energie ist nun die Hälfte der Summe dieser beiden Flächen.[10]

$$\begin{aligned}
E_{\text{Bogen}} &= \frac{1}{2} \cdot d \cdot (F_{\min} + F_{\max}) \\
(\text{einsetzen}) &= d \cdot \frac{1}{2} \cdot (0 + 2F_1 + 2F_2 + \cdots + 2F_{n-1} + F_n) \\
&= d \cdot (F_1 + F_2 + \cdots + F_{n-1} + \frac{1}{2}F_n) \\
&= d \cdot (F_1 + \cdots + F_n - \frac{1}{2}F_n) \qquad (4)
\end{aligned}$$

Hat man beispielsweise die Kräfte $50\ \text{N},\ 100\ \text{N},\ 150\ \text{N},\ 200\ \text{N}$ in Abständen von $d = 20\ cm$ gemessen (der Einfachheit halber, für eine genaue Berechnung ist der Abstand zwischen den Messungen zu gross), beträgt die Energie

$$\begin{aligned}
E_{\text{Bogen}} &= 20\ \text{cm} \cdot \frac{1}{2}\left(\left(50 + 100 + 150 + 200 - \frac{200}{2}\right)\ \text{N}\right) \\
&= 0.2\ \text{m} \cdot \frac{1}{2} \cdot 400\ \text{N} \\
&= 40\ \text{J}.
\end{aligned}$$

1.3 Berechnung der kinetischen Energie des Pfeils

Bei der Messung der Pfeilgeschwindigkeit ist es wichtig, immer den selben Pfeil (gleiches Gewicht) bei gleich bleibendem Auszug zu verwenden. Mit mehreren Messungen kann die Durchschnittsgeschwidigkeit relativ genau bestimmt werden, indem alle Geschwindigkeiten zusammengezählt und am Schluss durch die Anzahl Messungen geteilt werden. Grosse

[9] Natürlich könnte man auch rechnen: $(5\ \text{cm} \cdot 20\ \text{N}) + (5\ \text{cm} \cdot 30\ \text{N}) + (5\ \text{cm} \cdot 40\ \text{N}) + \cdots$, einfacher ist aber $5\ \text{cm} \cdot (20\ \text{N} + 30\ \text{N} + 40\ \text{N} + \cdots)$.

[10] Für Interessierte: Diese Formel entspricht dem Riemann-Integral.

«Ausreisser» in den Messungen, die auf Ablassfehler zurückzuführen sind, sollte man natürlich besser weglassen ;)

Die Formel zur Berechnung der Kinetischen Energie (Bewegungsenergie) lautet:

$$E_{\text{kin}} = \frac{1}{2} m v^2 \tag{5}$$

Doppelte Geschwindigkeit bedeutet also vierfache Energie.[11] Ein mit einer Geschwindigkeit von $v = 20$ m/s fliegender Pfeil mit einer Masse von $m = 30$ g (entspricht etwa 460 Grains[12]) hat eine kinetische Energie von 6 Joule:

$$E_{\text{kin1}} = \frac{1}{2} \cdot 0.03\,\text{kg} \cdot (20\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0.5 \cdot 0.03 \cdot 20^2 \cdot \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 6\,\text{J}$$

Bei einer Geschwindigkeit von $v = 40\ \frac{\text{m}}{\text{s}}$ ist die Energie also viermal so gross.

$$E_{\text{kin2}} = \frac{1}{2} \cdot 0.03\,\text{kg} \cdot (40\,\frac{\text{m}}{\text{s}})^2 = 0.5 \cdot 0.03 \cdot 40^2 \cdot \text{kg}\frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 24\,\text{J}$$

Währenddessen ist die Energie eines Pfeiles mit doppelter Masse aber nur zweimal so gross.

Je nach Gewicht des Pfeiles wird mehr oder weniger Energie auf ihn übertragen. Die optimale Pfeilmasse ist primär von der Stärke des Bogens abhängig; ein stärkerer Bogen kann auch schwerere Pfeile mit anständiger Geschwindigkeit schiessen. Je schwerer der Pfeil, desto mehr Energie wird auf ihn übertragen, die er dem Luftwiderstand entgegensetzen kann. Ab einer gewissen Grenze bringt das allerdings keinen Vorteil mehr – was nützt einem ein 10 kg schwerer Pfeil, der aber nur einen Meter weit fliegt.

Zum besseren Verständnis ein nachvollziehbares Beispiel: Steine werfen. Kieselsteine kann man am schnellsten werfen, aber der grösste Teil der Energie verbleibt im (tadaa) Wurfarm. Umgekehrt bei einem fussballgrossen Stein: Hier benötigt man die gesamte Kraft, um ihn nur ein, zwei Meter weit zu werfen oder stossen. Das Optimum für die beste Flugweite oder grösste Durchschlagskraft liegt irgendwo dazwischen (bitte nicht in bewohntem Gebiet ausprobieren).

1.4 Wirkungsgrad des Bogens

Nun ist es nicht mehr schwer, den Wirkungsgrad des Bogens – das heisst, wie viel der Energie tatsächlich auf den Pfeil übergeht – zu berechnen.

$$\eta = \frac{E_{\text{kin}}}{E_{\text{Bogen}}} \tag{6}$$

Mit den in den obigen Beispielen erhaltenen Werten ($E_{\text{kin2}} = 24$ J und $E_{\text{Bogen}} = 40$ J) ergibt sich ein Wirkungsgrad von $\eta = 60$ %.

$$\eta = \frac{24\ \text{J}}{40\ \text{J}} = 0.6 = 60\ \%$$

Die restlichen vierzig Prozent können nicht genutzt werden und werden nach im Bogen «verbraucht», nachdem der Pfeil die Sehne verlassen hat. Bei einem Leerschuss verbleibt aber die gesamte Energie im Bogen. Unter Umständen kann das zu einem Bruch führen.

[11] Da $40^2 = (2 \cdot 20)^2 = 2^2 \cdot 20^2 = 4 \cdot 20^2$

[12] Ein Grain entspricht etwa 0.0648 g.

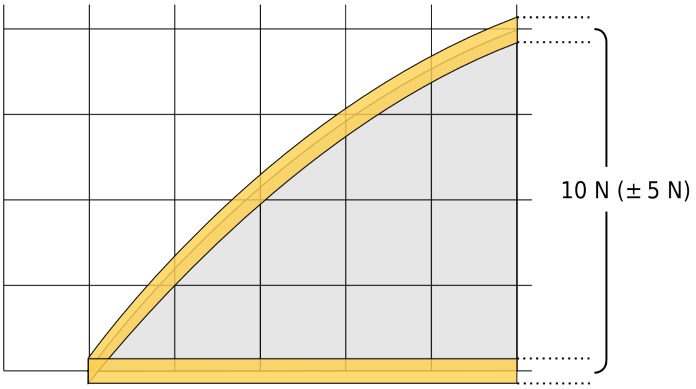
1.5 Messfehler

Total genau kann das Ergebnis nicht sein. Verschiedene Faktoren beeinflussen die Genauigkeit der Messung:

- Zugkraft: Waage, eventuell Feuchtigkeit des Bogens bei organischen Materialien, Energieverlust durch zusammengedrückte Holzzellen[13]
- Geschwindigkeit: Geschwindigkeitsmessgerät, Ablassfehler, tatsächlicher Auszug
- Eventuell Feuchtigkeit, die die Stärke des Bogens beeinflusst

Bei jeder Messung kommen noch «menschliche» Fehler hinzu, etwa beim Ablesen der Zugkraft oder bei der Genauigkeit des Auszuges.

Wie stark wirken sich Messfehler aus? Angenommen, bei der Messung der Zugkraft beträgt der Fehler $\mathcal{F} = \pm 5\ \mathrm{N}$.[14] Dann kommt man bei der Berechnung der Energie des Bogens auf einen Fehler von $\mathcal{F} \cdot (s_{\text{Auszug}} - s_{\text{Standh.}})$.



Das ergibt für einen Auszug von $0.7\ \mathrm{m}$ und eine Standhöhe von $0.1\ \mathrm{m}$ einen Fehler von $\mathcal{F}_E = 10\ \mathrm{N} \cdot 0.6\ \mathrm{m} = 6\ \mathrm{J}$. Bei einer gespeicherten Energie von $E = 75\ \mathrm{J}$ ergibt das eine Messabweichung von immerhin $f = \mathcal{F}_E / E = 8\ \%$.

Die Messabweichung kann abgeschätzt werden, indem man für eine bestimmte Auszuglänge drei Messungen hintereinander ausführt. Der Bogen wird zwischen den Messungen wieder entspannt, damit man auch wirklich drei einzelne Messerte hat. Diese drei Messungen werden gemittelt, indem man sie zusammenzählt und dann dann durch die Anzahl Messungen, also 3, teilt. Man nimmt nun an, dass dieses Resultat genau ist, und die Differenz zwischen dieser Mittelung und der davon am meisten abweichenden Messung ist die Messabweichung.

Beispiel: Drei Messungen $x_1 = 153\ \mathrm{N}$, $x_2 = 146\ \mathrm{N}$, $x_3 = 155\ \mathrm{N}$. Zusammen betragen die Messungen $\Sigma = 454\ \mathrm{N}$. Der Mittelwert beträgt also $x_f = \Sigma/3 = 151.3\ \mathrm{N}$, die maximale Abweichung ist in diesem Fall $151.3\ \mathrm{N} - 146\ \mathrm{N} = 5.3\ \mathrm{N}$ oder, da die Messung nach oben und unten abweichen kann, $\pm 5.3\ \mathrm{N}$.

[13] Wird ein Holzbogen länger als etwa 2 Sekunden ausgezogen, nimmt die Zugkraft leicht ab. Der selbe Effekt, der sichtbar wird, wenn man den Bogen mehrere Stunden lang aufgespannt lässt. Nach einiger Zeit «erholt» sich das Holz wieder, falls die Belastung nicht allzu stark war – sonst ensteht Stringfollow, eine dauerhafte Biegung.

[14] Ja – wieder ein $\mathcal{F}$. Nicht meine Schuld. Zur besseren Unterscheidung ist das Fehler-F jedoch in Kalligraphie-Schrift gesetzt, das Kraft-F kursiv: F.

1.5.1 Auswirkungen auf den Wirkungsgrad

Die Durchschnittsgeschwindigkeit kann relativ genau bestimmt werden, da ein Geschwindigkeitsmesser normalerweise sehr genau misst. Die einzige «Ungenauigkeit» ist der Mensch mit unterschiedlichem Ablass, aber von Interesse ist ja die Geschwindigkeit, die man beim normalen Schiessen erreicht, und nicht ein künstlich maximierter Wert.

Aus diesem Grund bleibt für den Wirkungsgrad die Abweichung *in Prozent* gleich.[15]

Autor: Simon A. Eugster, http://granjow.net
Die aktuellste Version dieses Dokument ist hier verfügbar.
Dank an Snake-Jo von fletchers-corner.de, Dragona und kra von bogensportinfo.de
und viele weitere aus den Foren für die Korrekturvorschläge und Anregungen!

[15] Die prozentuale Messabweichung bleibt bei der Division durch einen «genauen» Wert gleich: Beispiel: Ein Fantasiewert $z = 100 \pm 10$, der also um ± 10 % abweichen kann ($10/100 = 0.1 = 10$ %), liegt in $[90, 110]$. Teilt man diesen Wert durch einen zweiten, genauen Wert $x = 10$, erhält man $[9, 11]$ beziehungsweise $z/x = 10 \pm 1$. Das entspricht immer noch der selben prozentualen Abweichung ($1/10 = 0.1 = 10$ %).